

Group

Lecture 1(2)

Lecture 12(2)

线性代数应该这样学Liner
Algebra Done Right(中文)

(Undergraduate Texts in
Mathematics) Axler,
Sheldon Jay - Linear
Algebra Done Rig

线性代数应该这样学
(中文第3版)

第一章 向量空间

第二章 有限维向量空间

第三章 线性映射

第四章 多项式

第五章 不变子空间

第六章 内积空间

第七章 内积空间上的算子

第八章 复向量空间上的算
子

第九章 实向量空间上的算
子

第十章 迹与行列式

Jordan Form Fall 2021

1. 语言学习是多样性的
2. 集中的元素可以从很多
3. 子空间
4. 有国之间的差别、联系、关联

1. 语言学习是多样性的
2. 集中的元素可以从很多
3. 子空间
4. 有国之间的差别、联系、关联

向量空间有唯一的加法单位元.

W_1, W_2 are subspaces of V
 prove: $W_1 \cap W_2$ is a subspace of V $W_1 \subseteq W_2$ or $W_2 \subseteq W_1$
 假设 $W_1 \subseteq W_2$, $W_2 \subseteq W_1$
 $W_1 \subseteq W_2$ $W_2 \cap W_1 \subseteq W_2$ $W_1 \cap W_2 = W_1 \subseteq W_2$
 $W_2 \subseteq W_1$ $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1$ $W_1 \cap W_2 = W_2 \subseteq W_1$
 $\therefore W_1 \cap W_2 = W_1$ or W_2 $\therefore W_1 \subseteq W_2$ 得证

1.A $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{C}^n$

1.B 向量空间的定义

1.C 子空间

1.1 定义 复数 (complex number)

- 一个复数是一个有序对 (a, b) , 其中 $a, b \in \mathbb{R}$, 但我们记它
- 所有复数构成的集合记为 $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}.$$
- $\mathbb{C}$ 上的加法和乘法定义为:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$
 其中 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

在本书中 $\mathbb{R}$ 总是表示 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 实数域或复数域

1.8 定义 (Definition) **长度 (length)** **有序有限 n-tuple**

设 n 是非负整数。长度为 n 的就是 n 个有顺序的元素。这些元素可以是数或字符串或其他对象（这些元素可以是数，其他成员更像像数的东西）。

每个都具有如下形式：

$$(x_1, \dots, x_n)$$

两个组相等当且仅当它们长度相等、所含的元素相同并且元素的顺序一致。

组与集合有点不同：组中的元素是有顺序的并且允许多重，而集合中元素是无序且不重复的。

1.19 定义 向量列 (vector space)
向量空间就是由元素和标量组成的集合 V , 满足如下性质:

- 1. 加法性 (additivity)
对所有的 $u, v \in V$ 都有 $u + v = v + u$
- 2. 结合性 (associativity)
对所有的 $u, v, w \in V$ 都有 $(u + v) + w = u + (v + w)$
- 3. 加法恒等性 (additive identity)
存在元素 $0 \in V$ 使得所有的 $v \in V$ 都有 $v + 0 = v$
- 4. 加法逆元 (additive inverse)
对每个 $v \in V$ 都存在 $w \in V$ 使得 $v + w = 0$
- 5. 乘法恒等性 (multiplicative identity)
对所有的 $v \in V$ 都有 $1v = v$
- 6. 分配性 (distributive properties)
对所有的 $a, b \in \mathbb{R}$ 和 $v, w \in V$ 都有 $a(bv) = (ab)v$ 和 $a(bv + cw) = abv + acw$

解: $S = \{2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{$
 $f_1 = 2, f_2 = 3, f_3 = 4, \dots, f_n = n$

1.36 定义 子集的和 (sum of subsets) 可以相加性
 设 $U_1, \dots, U_m$ 是 V 的子集, 而 $V_1, \dots, V_n$ 由 $U_1, \dots, U_m$ 的 可能的和 所构成的集合. 记 $U = U_1 + \dots + U_m$. 更确切地说,

$$U = U_1 + \dots + U_m = \{u_1 + \dots + u_m : u_1 \in U_1, \dots, u_m \in U_m\}$$

1.3 复数的算术性质

交换性 (commutativity)

对所有 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 都有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $\alpha\beta = \beta\alpha$.

结合性 (associativity)

对所有 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ 都有 $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

单位元 (Identities)

对所有 $\alpha \in \mathbb{C}$ 都有 $\alpha + 0 = \alpha$, $1\alpha = \alpha$.

加法逆元 (additive inverse)

对每个 $\alpha \in \mathbb{C}$ 都存在唯一的一个 $\beta \in \mathbb{C}$ 使得 $\alpha + \beta = 0$.

乘法逆元 (multiplicative inverse)

对每个 $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ 都存在唯一的一个 $\beta \in \mathbb{C}$ 使得 $\alpha\beta = 1$.

分配性 (distributive property)

对所有 $\alpha, \mu, \beta \in \mathbb{C}$ 都有 $\alpha(\mu + \beta) = \alpha\mu + \alpha\beta$.

1.5 定义 $-\alpha$, 减法 (subtraction), $1/\alpha$, 除法 (division)

设 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

- 令 $-\alpha$ 表示 α 的加法逆元. 因此 $-\alpha$ 是使得 $\alpha + (-\alpha) = 0$ 的唯一复数. $\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$.
- $\mathbb{C}$ 上的减法定义为 $\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$.
- 对于 $\alpha \neq 0$, 令 $1/\alpha$ 表示 α 的乘法逆元. 因此 $1/\alpha$ 是使得 $\alpha(1/\alpha) = 1$ 的唯一复数.
- $\mathbb{C}$ 上的除法定义为 $\beta/\alpha = \beta(1/\alpha)$.

1.10 定义 F^n 从 F 中取出 n 个元素
 F^n 是 F 中元素组成的长度为 n 的组的集合:
 $F^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_j \in F, j = 1, \dots, n\}$.
 对于 $(x_1, \dots, x_n) \in F^n$ 以及 $j \in \{1, \dots, n\}$, 称 x_j 是 $(x_1, \dots, x_n)$ 的第 j 个

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

1.14 定义 0

用 0 表示长度为 n 且所有坐标都是 0 的组

$0 = (0, \dots, 0)$

1.16 定义 F^n 中的加法逆元 (additive inverse in F^n)

对于 $x \in F^n$, x 的加法逆元 (记作 $-x$) 就是满足下面条件的向量

$$x + (-x) = 0.$$

换言之, 若 $x = (x_1, \dots, x_n)$, 则 $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$.

1.17 定义 $\mathbb{F}^n$ 中的标量乘法 (scalar multiplication in $\mathbb{F}^n$)

一个数 λ 与 $\mathbb{F}^n$ 中的一个向量的乘积这样来计算: 用 λ 乘以向量的每个

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

其中 $\lambda \in \mathbb{F}$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$.

1.26 加法逆元唯一

向量空间中的每个元素都有唯一的加法

1.34 子空间的条件

V 的子集 U 是 V 的子空间当且仅当 U 满足以下三个条件:

加法单位元 (Additive Identity)

$$0 \in U,$$

加法的封闭性 (closed under addition)

$$u, w \in U \Rightarrow u + w \in U,$$

标量乘法的封闭性 (closed under scalar multiplication)

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ 和 } u \in U \Rightarrow \alpha u \in U.$$

$U = \{a_1x + a_2y + a_3z + a_4w + a_5v \mid$
对 $a_i \in \mathbb{R}$ 时 U 是 V 的子空间

证明: 任取 V 的子空间的交集作 V 的子空间
设该交集为 W 则有 $0 \in W$
取任意 $\alpha, \beta \in W$ 则 $\alpha + \beta \in W$ 有子空间 $\therefore W$
同理, $\alpha \lambda, \alpha \mu \in W \therefore W$ 是 V 的子空间

1.39 子空间的和是包含这些子空间的最小子空间
 设 $U_1, \dots, U_m$ 都是 V 的子空间, 则 $U_1 + \dots + U_m$ 是 V 的包含 $U_1, \dots,$

1.40 定义 直和 (direct sum)

设 $U_1, \dots, U_n$ 都是 V 的子空间。

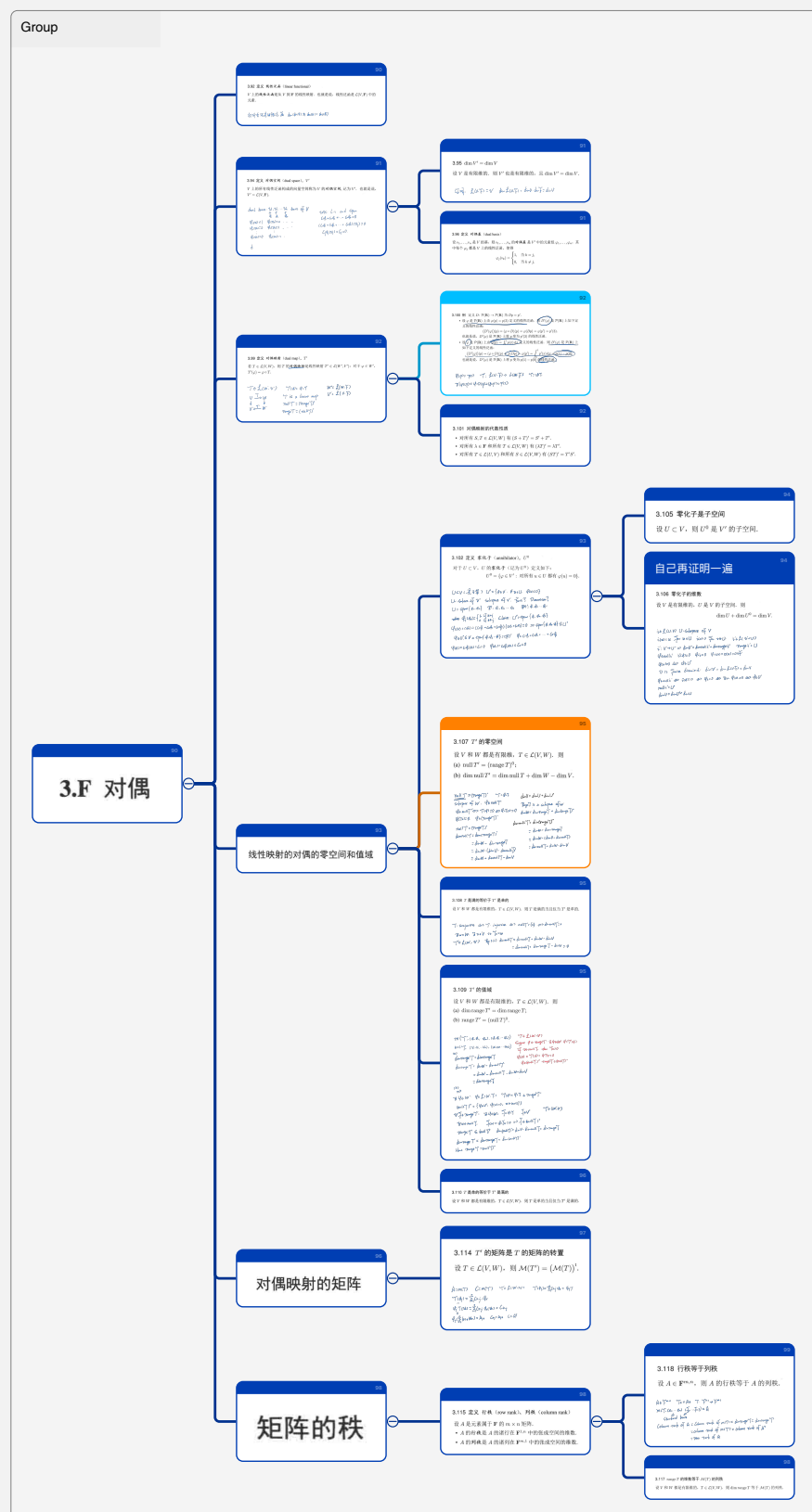
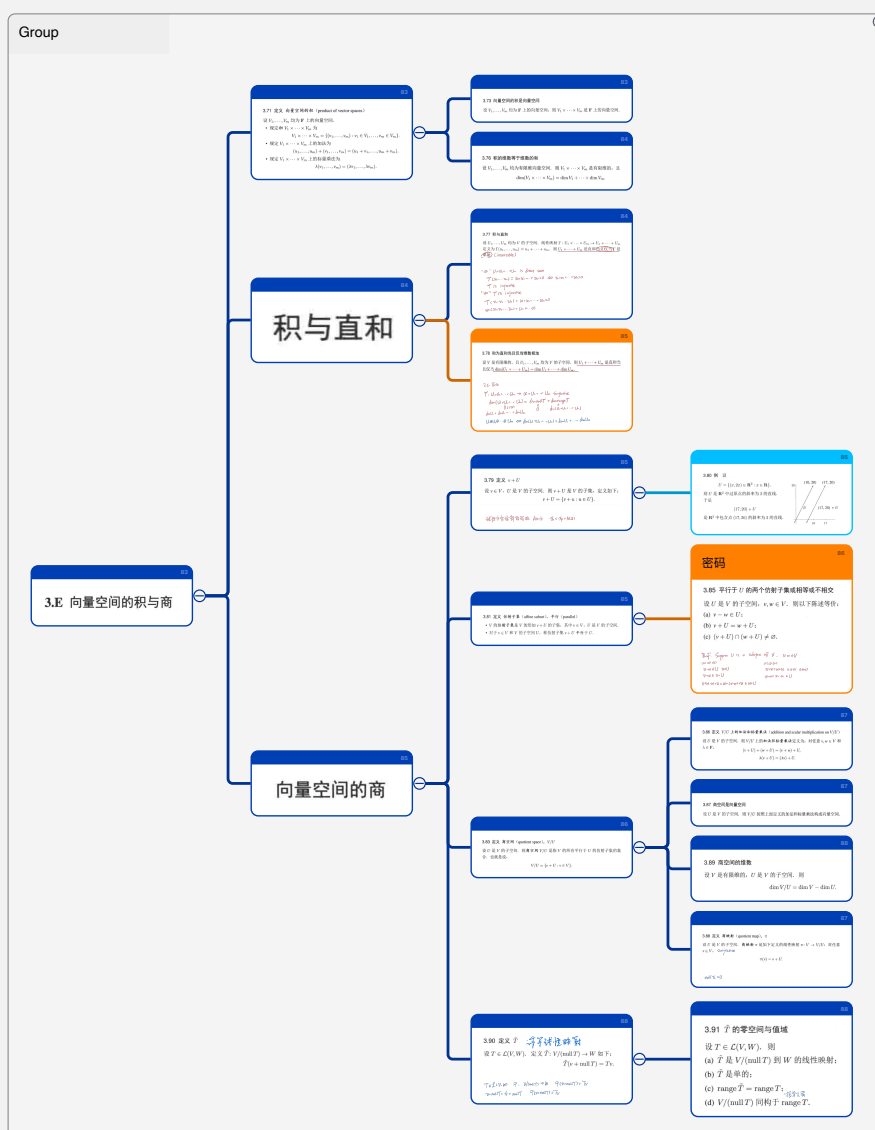
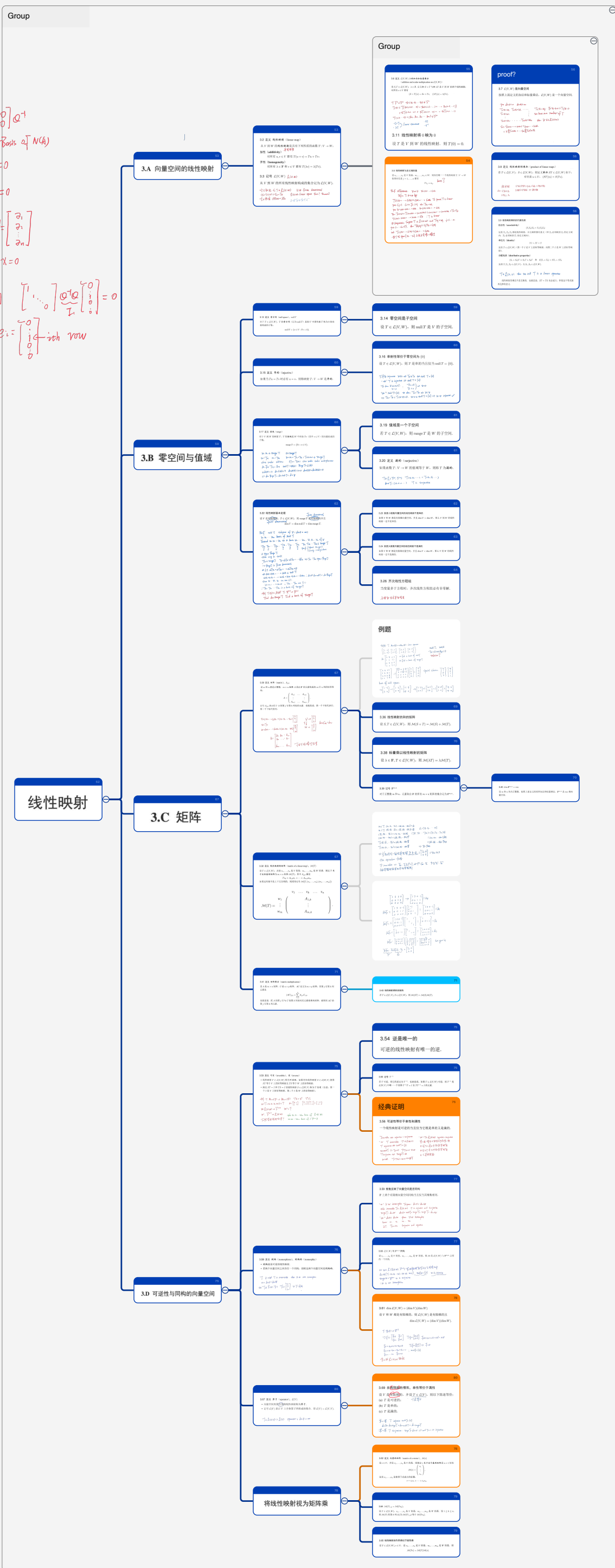
如果 $U_1 + \dots + U_n$ 称为直和。如果 $U_1 + \dots + U_n$ 中每个元素都可表成 $u_1 + \dots + u_n$ 且“每个 u_i 属于 U_i ”。

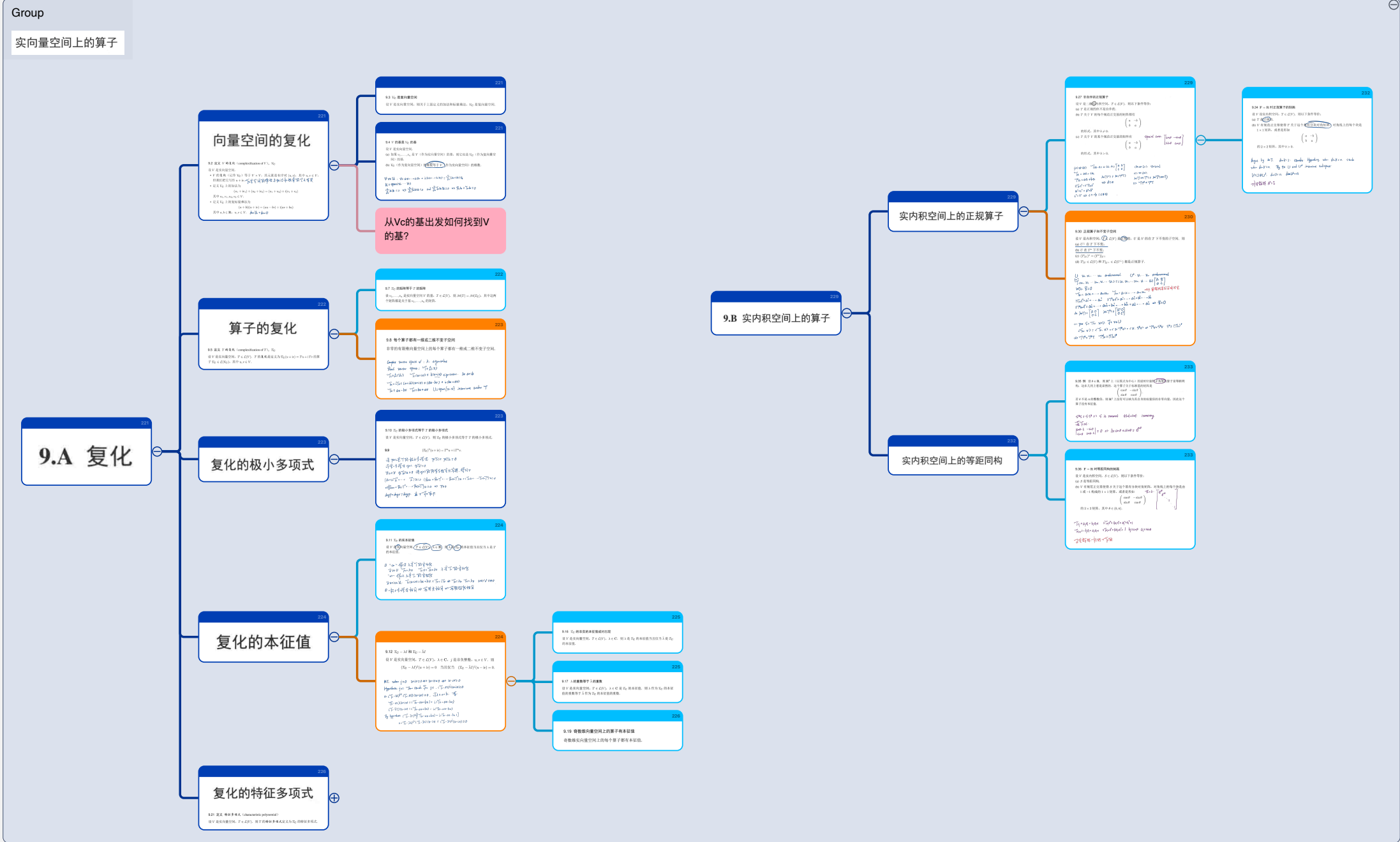
若 $U_1 + \dots + U_n$ 是直和，则用 $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ 来表式 $U_1 + \dots + U_n$ 。号 $\oplus$ 表明此处的和是一个直和。

若 $x, y \in \mathbf{F}^n$, 则 $x + y = y + x$.

1.44 直和的条件

1.45 两个子空间的直和 **不能推广到3个**
 设 U 和 W 都是 V 的子空间, 则 $U+W$ 是直和当且仅当 $U \cap W = \{0\}$.





第6章

6.A 内积与范数

6.2 定义 点积 (dot product)
对于 $x, y \in \mathbb{R}^n$, x 和 y 的点积 (记为 $x \cdot y$) 定义为
$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

其中 $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$.

6.3 定义 内积 (inner product)
 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, 在 V 中任意两个向量 x, y 都对应一个实数 $x \cdot y$, 称为 x 和 y 的内积, 记为 $\langle x, y \rangle$.
内积满足:
(a) 对称性: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
(b) 线性性: $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$
(c) 正定性: $\langle x, x \rangle \geq 0$, 且 $\langle x, x \rangle = 0$ 当且仅当 $x = 0$.

6.5 定义 内积空间 (inner product space)
内积空间是带有内积的向量空间 V .

6.6 定义 范数 (norm)
对于 $x \in V$, x 的范数 (记为 $\|x\|$) 定义为 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

6.11 定义 正交 (orthogonal)
两个向量 $x, y \in V$ 称为正交的, 如果 $\langle x, y \rangle = 0$.
一个向量 x 称为正交的, 如果 $\langle x, x \rangle = 0$.

6.4 定义 范数 (norm)
对于 $x \in V$, x 的范数 (记为 $\|x\|$) 定义为 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.
范数满足:
(a) 非负性: $\|x\| \geq 0$, 且 $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$.
(b) 齐次性: $\|ax\| = |a| \|x\|$
(c) 三角不等式: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

6.7 范数的基本性质
(a) 范数 $\|x\|$ 是非负实数, 且 $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$.
(b) 齐次性: $\|ax\| = |a| \|x\|$
(c) 三角不等式: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
(d) 范数 $\|x\|$ 是 x 的模长, 即 $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

6.10 范数的基本性质
设 $x \in V$.
(a) $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$.
(b) 对所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 均有 $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

6.12 正交性与 0
(a) 0 正交于 V 中的任意向量.
(b) 0 是 V 中唯一一个与自身正交的向量.

6.13 正交性
两个向量 $x, y \in V$ 称为正交的, 如果 $\langle x, y \rangle = 0$.
一个向量 x 称为正交的, 如果 $\langle x, x \rangle = 0$.

6.14 正交性
两个向量 $x, y \in V$ 称为正交的, 如果 $\langle x, y \rangle = 0$.
一个向量 x 称为正交的, 如果 $\langle x, x \rangle = 0$.

6.15 正交性
两个向量 $x, y \in V$ 称为正交的, 如果 $\langle x, y \rangle = 0$.
一个向量 x 称为正交的, 如果 $\langle x, x \rangle = 0$.

6.16 正交性
两个向量 $x, y \in V$ 称为正交的, 如果 $\langle x, y \rangle = 0$.
一个向量 x 称为正交的, 如果 $\langle x, x \rangle = 0$.

6.17 正交性
两个向量 $x, y \in V$ 称为正交的, 如果 $\langle x, y \rangle = 0$.
一个向量 x 称为正交的, 如果 $\langle x, x \rangle = 0$.

6.18 正交性
两个向量 $x, y \in V$ 称为正交的, 如果 $\langle x, y \rangle = 0$.
一个向量 x 称为正交的, 如果 $\langle x, x \rangle = 0$.

6.19 正交性
两个向量 $x, y \in V$ 称为正交的, 如果 $\langle x, y \rangle = 0$.
一个向量 x 称为正交的, 如果 $\langle x, x \rangle = 0$.

6.20 正交性
两个向量 $x, y \in V$ 称为正交的, 如果 $\langle x, y \rangle = 0$.
一个向量 x 称为正交的, 如果 $\langle x, x \rangle = 0$.

6.21 正交性
两个向量 $x, y \in V$ 称为正交的, 如果 $\langle x, y \rangle = 0$.
一个向量 x 称为正交的, 如果 $\langle x, x \rangle = 0$.

6.22 正交性
两个向量 $x, y \in V$ 称为正交的, 如果 $\langle x, y \rangle = 0$.
一个向量 x 称为正交的, 如果 $\langle x, x \rangle = 0$.

6.23 正交性
两个向量 $x, y \in V$ 称为正交的, 如果 $\langle x, y \rangle = 0$.
一个向量 x 称为正交的, 如果 $\langle x, x \rangle = 0$.

6.24 正交性
两个向量 $x, y \in V$ 称为正交的, 如果 $\langle x, y \rangle = 0$.
一个向量 x 称为正交的, 如果 $\langle x, x \rangle = 0$.

6.25 正交性
两个向量 $x, y \in V$ 称为正交的, 如果 $\langle x, y \rangle = 0$.
一个向量 x 称为正交的, 如果 $\langle x, x \rangle = 0$.

6.26 正交性
两个向量 $x, y \in V$ 称为正交的, 如果 $\langle x, y \rangle = 0$.
一个向量 x 称为正交的, 如果 $\langle x, x \rangle = 0$.

6.B 规范正交基

6.27 定义 规范正交基 (orthonormal basis)
 V 的一组规范正交基是 V 中的一组规范正交向量, 使得 V 中的任意向量 x 都可以唯一地表示为这组向量的线性组合.

6.28 规范正交基的性质
设 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的一组规范正交基, 则 V 中的任意向量 x 都可以唯一地表示为这组向量的线性组合:
$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

其中 $x_1, \dots, x_n$ 是 x 在 $e_1, \dots, e_n$ 上的投影.

6.29 规范正交基的存在性
每个有限维内积空间都有规范正交基.

6.30 规范正交基的构造
设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基, 则 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的一组规范正交基, 其中 $e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$.

6.31 规范正交基的构造
设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基, 则 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的一组规范正交基, 其中 $e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$.

6.32 规范正交基的构造
设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基, 则 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的一组规范正交基, 其中 $e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$.

6.33 规范正交基的构造
设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基, 则 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的一组规范正交基, 其中 $e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$.

6.34 规范正交基的构造
设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基, 则 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的一组规范正交基, 其中 $e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$.

6.35 规范正交基的构造
设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基, 则 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的一组规范正交基, 其中 $e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$.

6.36 规范正交基的构造
设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基, 则 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的一组规范正交基, 其中 $e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$.

6.37 规范正交基的构造
设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基, 则 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的一组规范正交基, 其中 $e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$.

6.38 规范正交基的构造
设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基, 则 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的一组规范正交基, 其中 $e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$.

6.39 规范正交基的构造
设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基, 则 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的一组规范正交基, 其中 $e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$.

6.40 规范正交基的构造
设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基, 则 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的一组规范正交基, 其中 $e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$.

6.41 规范正交基的构造
设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基, 则 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的一组规范正交基, 其中 $e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$.

6.42 规范正交基的构造
设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基, 则 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的一组规范正交基, 其中 $e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$.

6.43 规范正交基的构造
设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基, 则 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的一组规范正交基, 其中 $e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$.

6.44 规范正交基的构造
设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基, 则 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的一组规范正交基, 其中 $e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$.

6.45 规范正交基的构造
设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基, 则 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的一组规范正交基, 其中 $e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$.

6.46 规范正交基的构造
设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基, 则 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的一组规范正交基, 其中 $e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$.

6.47 规范正交基的构造
设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基, 则 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的一组规范正交基, 其中 $e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$.

6.C 正交补与极小化问题

正交补

6.48 定义 正交补 (orthogonal complement)
设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间, 则 $V^\perp$ 是 V 的正交补, 即 $V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \perp V\}$.

6.49 正交补的性质
设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间, 则 $V^\perp$ 是 V 的正交补, 且 $V \cap V^\perp = \{0\}$.

6.50 正交补的性质
设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间, 则 $V^\perp$ 是 V 的正交补, 且 $V \cap V^\perp = \{0\}$.

6.51 正交补的性质
设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间, 则 $V^\perp$ 是 V 的正交补, 且 $V \cap V^\perp = \{0\}$.

6.52 正交补的性质
设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间, 则 $V^\perp$ 是 V 的正交补, 且 $V \cap V^\perp = \{0\}$.

6.53 正交补的性质
设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间, 则 $V^\perp$ 是 V 的正交补, 且 $V \cap V^\perp = \{0\}$.

6.54 正交补的性质
设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间, 则 $V^\perp$ 是 V 的正交补, 且 $V \cap V^\perp = \{0\}$.

6.55 正交补的性质
设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间, 则 $V^\perp$ 是 V 的正交补, 且 $V \cap V^\perp = \{0\}$.

6.56 正交补的性质
设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间, 则 $V^\perp$ 是 V 的正交补, 且 $V \cap V^\perp = \{0\}$.

6.57 正交补的性质
设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间, 则 $V^\perp$ 是 V 的正交补, 且 $V \cap V^\perp = \{0\}$.

极小化问题

6.58 定义 极小化问题 (minimization problem)
设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个实值函数, 则 f 的极小化问题是找到 f 的最小值.

6.59 极小化问题的性质
设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个实值函数, 则 f 的极小化问题是找到 f 的最小值.

6.60 极小化问题的性质
设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个实值函数, 则 f 的极小化问题是找到 f 的最小值.

6.61 极小化问题的性质
设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个实值函数, 则 f 的极小化问题是找到 f 的最小值.

6.62 极小化问题的性质
设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个实值函数, 则 f 的极小化问题是找到 f 的最小值.

6.63 极小化问题的性质
设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个实值函数, 则 f 的极小化问题是找到 f 的最小值.

6.64 极小化问题的性质
设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个实值函数, 则 f 的极小化问题是找到 f 的最小值.

Group

第10章 迹与行列式

10.A 迹

基的变更

10.1 线性变换与线性映射

设 V 是 n 维线性空间， T 是 V 上的线性变换。取 V 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，则 T 可表示为 $n \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ ，其中 a_{ij} 是 $T(\alpha_j)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标。

10.2 基变换与坐标变换

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是 V 的两组基，且 $\beta_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \alpha_i$ ，记 $P = (p_{ij})$ 。若 T 在基 α 下的矩阵为 A ，则在基 β 下的矩阵为 $B = P^{-1}AP$ 。

迹：算子与矩阵间的联系

10.3 迹的定义

设 T 是 V 上的线性变换， $A = (a_{ij})$ 是 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵。则 T 的迹定义为 $\text{tr}(T) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ 。

10.4 迹的性质

(1) $\text{tr}(T) = \text{tr}(A)$ ，即迹只与线性变换有关，与基的选取无关。

(2) $\text{tr}(T) = \text{tr}(A^T)$ ，即迹等于矩阵的转置的迹。

(3) $\text{tr}(T) = \text{tr}(P^{-1}AP)$ ，即迹在相似变换下不变。

Group

10.5 迹的循环性

设 T, S 是 V 上的线性变换， A, B 是它们在基 α 下的矩阵。则 $\text{tr}(TS) = \text{tr}(ST)$ 。

10.6 迹与特征值

设 T 是 V 上的线性变换， $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 T 的特征值。则 $\text{tr}(T) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ 。

10.7 迹与秩

设 T 是 V 上的线性变换， A 是它在基 α 下的矩阵。若 $\text{tr}(T) = 0$ ，则 A 的秩 $\leq n-1$ 。

10.B 行列式

算子的行列式

10.8 行列式的定义

设 T 是 V 上的线性变换， $A = (a_{ij})$ 是 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵。则 T 的行列式定义为 $\det(T) = \det(A)$ 。

10.9 行列式的性质

(1) $\det(T) = \det(A^T)$ ，即行列式等于矩阵的转置的行列式。

(2) $\det(T) = \det(P^{-1}AP)$ ，即行列式在相似变换下不变。

(3) $\det(T) = \det(A)$ ，即行列式等于矩阵的行列式。

矩阵的行列式

10.10 行列式的展开

设 $A = (a_{ij})$ 是 $n \times n$ 矩阵。则 $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$ ，其中 A_{ij} 是 A 的 (i, j) 余子式。

10.11 行列式的性质

(1) $\det(A) = \det(A^T)$ ，即行列式等于矩阵的转置的行列式。

(2) $\det(A) = \det(P^{-1}AP)$ ，即行列式在相似变换下不变。

(3) $\det(A) = \det(A)$ ，即行列式等于矩阵的行列式。

行列式的符号

10.12 行列式的符号

设 $A = (a_{ij})$ 是 $n \times n$ 矩阵。则 $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$ ，其中 $\text{sgn}(\sigma)$ 是 σ 的符号。

10.13 行列式的性质

(1) $\det(A) = \det(A^T)$ ，即行列式等于矩阵的转置的行列式。

(2) $\det(A) = \det(P^{-1}AP)$ ，即行列式在相似变换下不变。

(3) $\det(A) = \det(A)$ ，即行列式等于矩阵的行列式。

体积

10.14 体积的定义

设 T 是 V 上的线性变换， A 是它在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵。则 T 的体积定义为 $|\det(T)|$ 。

10.15 体积的性质

(1) $|\det(T)| = |\det(A)|$ ，即体积等于矩阵的行列式的绝对值。

(2) $|\det(T)| = |\det(P^{-1}AP)|$ ，即体积在相似变换下不变。

(3) $|\det(T)| = |\det(A)|$ ，即体积等于矩阵的行列式的绝对值。

Summary

迹与行列式的性质

迹：算子与矩阵间的联系

行列式：算子的行列式

体积：算子的体积

Summary

行列式的性质

行列式的展开

行列式的符号

多项式

多项式的带余除法

105

回忆一下, 对于函数 $p: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$, 若存在 $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{F}$ 使得对所有 $z \in \mathbb{F}$ 都有

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m,$$

则称函数 p 为系数在 $\mathbb{F}$ 中的多项式。

李维平讲李维平

4.7 若一个多项式是零函数, 则其所有系数均为 0

设 $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{F}$. 若对任意 $z \in \mathbb{F}$ 均有

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0,$$

则 $a_0 = \dots = a_n = 0$.

104

4.3 定义 复共轭 (complex conjugate), $\bar{z}$ 、绝对值 (absolute value), $|z|$
 设 $z \in \mathbb{C}$.

- $z \in \mathbb{C}$ 的复共轭 (记作 $\bar{z}$) 定义为 $\bar{z} = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$.
- 复数 z 的绝对值 (记作 $|z|$) 定义为 $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$.

104

4.2 定义 实部 (real part), $\operatorname{Re} z$ 、虚部 (imaginary part), $\operatorname{Im} z$

设 $z = a + ib$, 其中 a 和 b 均为实数. $z = a + ib$

- z 的实部 (记作 $\operatorname{Re} z$) 定义为 $\operatorname{Re} z = a$.
- z 的虚部 (记作 $\operatorname{Im} z$) 定义为 $\operatorname{Im} z = b$.

10/14

4.5 复数的性质

设 $w_1, z \in \mathbb{C}$. 则

- z 与 z 的共轭: $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$
- z 与 z 的虚部: $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z$
- z 与 z 的积: $z\bar{z} = |z|^2$

复共轭的可加性与可乘性: $\overline{w+z} = \bar{w} + \bar{z}$ 且 $\overline{wz} = \bar{w}\bar{z}$

共轭的共轭: $\overline{\bar{z}} = z$

实部与虚部的界: $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ 且 $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$

实数与虚数恒等式: $|z| = |\bar{z}|$

绝对值的可乘性: $|wz| = |w||z|$

三角不等式: $|w+z| \leq |w| + |z|$

多项式的零点

4.10 定义 阶数 (factor)

称多项式 $a \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ 为多项式 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ 的因子, 如果存在多项式 $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ 使得 $p = aq$.

4.11 多项式的每个零点对应一个一次因子

设 $p \in \mathcal{P}(F)$, $\lambda \in F$. 则 $p(\lambda) = 0$ 当且仅当存在非零式 $q \in \mathcal{P}(F)$ 使得对每个 $z \in F$ 均有 $p(z) = (z - \lambda)q(z)$.

$\Delta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $\Gamma: (2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$
 $\text{如 } \mathcal{P}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$
 $\mathcal{P}: (2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$

4.9 定义 多项式的零点 (zero of a polynomial)

称数 $\lambda \in F$ 为多项式 $p \in P(F)$ 的零点 (或根), 如果 $p(\lambda) = 0$.

4.12 多项式零点的个数不超过它的次数

Proof by MI

$T_1 = 1, 2, 3, \dots, n$ and so p has n roots

$T_2 = 1, 2, 3, \dots, n$ and so p has n roots

Suppose $n=1$ occurring p has one root

108

C 上多项式的分解

[illegible]

4.16 二次多项式的分解

设 $b, c \in \mathbf{R}$. 则存在 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ 使得分解式

$$x^2 + bx + c = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$$

成立当且仅当 $b^2 \geq 4c$.

4.15 实系数多项式的非实零点是成对出现的
 设 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ 是实系数多项式. 若 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是 p 的零点, 则 $\bar{\lambda}$ 也是 p 的零点.
 成对出现且重数相同

109

108

4.13 代数学基本定理

每个非常数的复系数多项式都有零点.

有趣的结论

Theorem
(艾森斯坦(Eisenstein)判别法)设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

是一个整系数多项式. 如果有一个素数 p , 使得

- (1) $p \nmid a_n$,
- (2) $p \mid a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$,
- (3) $p^2 \nmid a_0$.

那么 $f(x)$ 在有理数上是不可约的.

Theorem

$\mathcal{P}(\mathbb{F})$ 中的任意两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互素充分必要条件是存在 $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ 中的多项式 $u(x), v(x)$ 使

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

Theorem

对于 $\mathcal{P}[T]$ 中的任意两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$, 在 $\mathcal{P}[T]$ 中存在一个最大公因子 $u(x) = \gcd(x, g(x))$, 且 $u(x)$ 可以表示为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的一个组合, 即有 $\mathcal{P}[T]$ 中的多项式 $w(x), v(x)$ 使

$$u(x) = w(x)f(x) + v(x)g(x).$$